Задание 3. Приведение уравнения поверхности 2-го порядка к каноническому виду

Решение:

Матрица поверхности второго порядка задаётся таким образом:

Каждый элемент aij матрицы соответствует коэффициенту при соответствующем члене поверхности второго порядка. Общий вид уравнения поверхности второго порядка может быть записан как:

Здесь a00 представляет свободный член и обычно не включается в матрицу, поскольку он не соответствует элементу матрицы. Он определяет базовый уровень поверхности без учета влияния переменных. В контексте геометрической интерпретации, свободный член может соответствовать смещению поверхности относительно начала координат.

Для данного уравнения

Мы можем составить матрицу следующим образом:

Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы A. Для этого решим уравнение det(A − λI) = 0, где λ - собственное значение, а I - единичная матрица:

Найдём собственные векторы

Полученная система имеет ненулевые решения, если ее определитель равен нулю, т.е.

Раскрывая определитель, получим:

Находим:   
При получим систему:

Решив её мы получаем первый собственный вектор:

При

При

найденные собственные векторы, чтобы получить ортонормированный базис. Для этого разделим каждый собственный вектор на его длину:

Теперь у нас есть ортонормированные собственные векторы i, j, k, которые составляют ортогональную матрицу преобразования S:

Так как определитель матрицы, составленной из ортогонального базиса равен -1, то это означает поворот системы координат вместе с зеркальным отображением. В декартовой системе координат это является левой тройков векторов.

В данном базисе квадратичная форма будет иметь диагональный вид. Выразим старые координаты через новые по формуле:

Получим систему замены переменных

Выпишем уравнения после диагонализации:

-q12+3q22+5q32=0

данный результат можно было получить не нормируя базис, а просто получить матрицу A′ по формуле: A ′ = v1 v2 v3 −1 · A · v1 v2 v3 Где A′ находится очевидно после проверки полноты базиса собственного подпространства A и выглядит:

Изобразите график уравнения в исходной системе координат. Какую поверхность оно задаёт?

Укажите на графике оси исходной и приведённой систем координат.







